TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 11

La integral de Stieltjes

Previamente al trabajo de Lebesgue, Thomas Joannes Stieltjes había extendido el concepto de integral en una dirección distinta a la de Lebesgue. En el año 1894 publicó un artículo titulado *Recherches sur les fractions continues*, donde planteó el problema de determinar el límite, si existe, de una fracción continua de la forma:

$$\frac{1}{a_1 z + \frac{1}{a_2 z + \frac{1}{a_3 z + \frac{1}{\cdots}}}}$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos y z un número real o un número complejo.

En el desarrollo que realizó Stieltjes en su artículo, obtuvo una expresión que lo llevó a introducir el concepto de momento de una función monótona creciente y al problema de la determinación de esa función a partir de sus momentos. Para ello, decía que una distribución de masa sobre la parte positiva de una recta de origen O representa una función creciente de la distancia x al origen. Agregaba que, inversamente, una función creciente, definida sobre la parte positiva de la recta, se puede imaginar como representando una distribución de masa. Dada una función creciente Φ, definida en un intervalo $[a, b]$ sobre la parte positiva de una recta, consideraba una partición $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, tomaba un punto ξ_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, consideraba la suma $\sum_{i=1}^n \xi_i \left(\Phi\left(x_i\right) - \Phi\left(x_{i-1}\right)\right)$ y definía el momento de Φ como el límite de esa suma cuando las longitudes de los subintervalos de la partición tienden a cero (para $k \in \mathbb{N}$, el momento de orden k de Φ sería el límite de las sumas $\sum_{i=1}^n \xi_i^k \left(\Phi\left(x_i\right) - \Phi\left(x_{i-1}\right)\right)$). Generalizando esta idea, consideró una función continua f, definida sobre el intervalo $[a, b]$, y definió la integral de f con respecto a Φ en el intervalo $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(u)\, d\Phi(u)$, como el límite de las sumas $\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i\right) \left(\Phi\left(x_i\right) - \Phi\left(x_{i-1}\right)\right)$. De esta forma surgió lo que ahora se conoce como la integral de Riemann-Stieltjes.

La definición y las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes son similares a las de la integral de Riemann. Ésta última resulta más simple ya que la función con respecto a la cual se integra es creciente y continua.

La integral de Riemann-Stieltjes

DEFINICIONES

Definición 1. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una particion del intervalo $[a,b]$. Una suma de Riemann-Stieltjes $S(P,f,g)$ de f con respecto a g, correspondiente a la particion P, es una suma de la forma $S(P,f,g) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$, donde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.*

Definición 2. *Se dice que f es integrable con respecto a g en el intervalo $[a,b]$ si existe un numero real I tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una particion P_ε del intervalo $[a,b]$ tal que $|S(P,f,g) - I| < \varepsilon$ para cualquier particion P que sea un refinamiento de P_ε y cualquier suma de Riemann-Stieltjes $S(P,f,g)$ de f con respecto a g, correspondiente a la particion P. Al numero real I de esta definición se le llama la integral de f con respecto a g y se le denota por $\int_a^b f dg$.*

Criterio de Cauchy

Definición 3. *Se dice que la pareja de funciones acotadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface el criterio de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε del intervalo $[a,b]$ tal que si P y P' son dos refinamientos de P_ε y $S(P,f,g)$, $S(P',f,g)$ son sumas de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g, entonces:*

$$|S(P,f,g) - S(P',f,g)| < \varepsilon$$

Definición 4. *Diremos que una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en un punto $x_0 \in (a,b)$ si existe $\delta > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b]$ y g es de variación acotada en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Diremos que g es de variación acotada en a (resp. b) si existe $\delta > 0$ tal que $[a, a+\delta] \subset [a,b]$ (resp. $[b-\delta, b] \subset [a,b]$) y g es de variación acotada en $[a, a+\delta]$ (resp. $[b-\delta, b]$).*

Diremos que g es localmente de variación acotada en $[a,b]$ si es de variación acotada en cada punto $x_0 \in [a,b]$.

RESULTADOS

1. Una función f es integrable con respecto a g en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si la pareja f, g satisface el criterio de Cauchy.

2. Si g es de variación acotada, entonces toda función continua es integrable con respecto a g.

3. Si $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables con respecto a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ es integrable con respecto a g y:

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\, dg = \alpha_1 \int_a^b f_1 dg + \alpha_2 \int_a^b f_2 dg$$

4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y con respecto a $g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces f es integrable con respecto a $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ y:

$$\int_a^b f d\,(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 \int_a^b f dg_1 + \alpha_2 \int_a^b f dg_2$$

5. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a una función no decreciente $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces $|f|$ es integrable con respecto a g y:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f|\, dg$$

6. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F\,(t) = \int_a^t f dg$$

es de variación acotada.

7. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que no es de variación acotada en $[a, b]$. Entonces existe una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la cual no es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a g.

8. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y supongamos que f es integrable con respecto a g, entonces g es integrable con respecto a f y, además, se tiene:

$$\int_a^b g df = g(b) f(b) - g(a) f(a) - \int_a^b f dg$$

9. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua de variación acotada y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , entonces $F \circ g$ es de variación acotada y:

$$F(g\,(t)) = F(g\,(a)) + \int_a^t F'(g\,(s)) dg\,(s)$$

para cualquier $t \in [a, b]$.

DEMOSTRACIONES

Teorema 1. *Una función f es integrable con respecto a g en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si la pareja f, g satisface el criterio de Cauchy.*

Demostración

Si f es integrable con respecto a g, claramente se satisface el criterio de Cauchy. Para el inverso, definamos inductivamente una sucesión de particiones $\{Q_n\}$ tal que $Q_0 = \{a,b\}$ y, para $n \geq 1$, $Q_n \supset Q_{n-1}$ y si $P, Q \supset Q_n$ entonces $|S(P,f,g) - S(Q,f,g)| < \frac{1}{n}$ para cualquier par de sumas de Riemann-Stieltjes $S(P,f,g)$ y $S(Q,f,g)$.

Para cada n consideremos entonces cualquier suma de Riemann-Stieltjes $S(Q_n,f,g)$. La sucesión $\{S(Q_n,f,g) : n \in \mathbb{N}\}$ claramente es de Cauchy y por lo tanto converge.

Sea $I = \text{lím}_{n \rightsquigarrow \infty} S(Q_n,f,g)$ y, dada $\varepsilon > 0$, sea N tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|S(Q_n,f,g) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $n \geq N$.

Si $P \supset Q_N$, se tiene $|S(P,f,g) - S(Q_N,f,g)| < \frac{1}{N}$, por lo tanto:

$$|S(P,f,g) - I| \leq |S(P,f,g) - S(Q_N,f,g)| + |S(Q_N,f,g) - I| < \tfrac{1}{N} + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Se concluye entonces que f es integrable con respecto a g.

$\blacksquare$

Teorema 2. *Si g es de variación acotada, entonces toda función continua es integrable con respecto a g.*

Demostración

Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

Si g es constante en el intervalo $[a,b]$, el resultado es trivial.

Supongamos que g no es constante en el intervalo $[a,b]$ y definamos $v = V_g[a,b]$.

Como f es uniformemente continua en $[a,b]$, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a,b]$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2v}$.

Sea P_ε una partición de $[a,b]$ de norma menor que δ, P un refinamiento de P_ε y $S(P,f,g)$, $S(P_\varepsilon,f,g)$ sumas de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g.

Si $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ y $S(P,f,g) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\left[g(y_j) - g(y_{j-1})\right]$, entonces, por ser P un refinamiento de P_ε, $S(P_\varepsilon,f,g)$ puede escribirse en la forma:

$$S(P_\varepsilon,f,g) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} f(\beta_j)\left[g(y_j) - g(y_{j-1})\right]$$

donde β_j no necesariamente pertenece al intervalo $[y_{j-1}, y_j]$, pero de tal manera que, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ξ_j y β_j pertenecen a un mismo intervalo de la forma $[x_{k-1}, x_k]$. Se tiene entonces:

$|S(P, f, g) - S(P_\varepsilon, f, g)| = \left|\sum_{j=1}^{m} \left[f(\xi_j) - f(\beta_j)\right] \left[g\left(y_j\right) - g\left(y_{j-1}\right)\right]\right|$

$< \frac{\varepsilon}{2v} \left|\sum_{j=1}^{m} \left[g\left(y_j\right) - g\left(y_{j-1}\right)\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2v} V_g[a, b] = \frac{\varepsilon}{2}$

Si P' es otro refinamiento de P_ε y $S(P', f, g)$ es una suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g, se tiene:

$$|S(P, f, g) - S(P', f, g)| \leq |S(P, f, g) - S(P_\varepsilon, f, g)| + |S(P', f, g) - S(P_\varepsilon, f, g)| < \varepsilon$$

Así que la pareja f, g satisface el criterio de Cauchy y, por lo tanto, f es integrable con respecto a g.

■

Teorema 3. *a) Si $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables con respecto a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ es integrable con respecto a g y:*

$\int_a^b \left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right) dg = \alpha_1 \int_a^b f_1 dg + \alpha_2 \int_a^b f_2 dg$

b) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y con respecto a $g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces f es integrable con respecto a $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ y:

$\int_a^b f d\left(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\right) = \alpha_1 \int_a^b f dg_1 + \alpha_2 \int_a^b f dg_2$

c) Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y $c \in [a, b]$, entonces f es integrable con respecto a g en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si es integrable con respecto a g en cada uno de los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. En ese caso se tiene:

$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$

d) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función no negativa e integrable con respecto a una función no decreciente $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b f dg \geq 0$.

e) Si $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables con respecto a una función no decreciente $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f_1 \leq f_2$, entonces $\int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg$.

f) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a una función no decreciente $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces $|f|$ es integrable con respecto a g y:

$\left|\int_a^b f dg\right| \leq \int_a^b |f| \, dg$

El siguiente resultado es importante ya que muestra que la propiedad de que la función integradora sea de variación acotada se conserva para la integral que se obtiene. Esto hace que la integral de cualquier función continua con respecto a la función que se obtiene al integrar esté bien definida.

Teorema 4. *Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(t) = \int_a^t f dg$$

es de variación acotada.

Demostración

Sean $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes tales que $g = f_1 - f_2$, $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Entonces:

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dg \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f| \, df_1 + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f| \, df_2$$

$$= \int_a^b |f| \, df_1 + \int_a^b |f| \, df_2 \leq M [f_1(b) - f_1(a)] + M [f_2(b) - f_2(a)]$$

Así que:

$$V_F[a, b] = \sup\{V_g(P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

$$\leq M [f_1(b) - f_1(a)] + M [f_2(b) - f_2(a)] < \infty$$

■

Lo siguiente tiene como objetivo demostrar que si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ no es de variación acotada, entonces existe una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f no es integrable con respecto a g, lo cual tiene como corolario que si toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces g es de variación acotada.

Teorema 5. *Una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en $[a, b]$ si y sólo si es localmente de variación acotada en $[a, b]$.*

Proposición 1. *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que no es de variación acotada en $[a, b]$. Entonces existe $w \in [a, b]$ para el cual se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:*

a) Existe una sucesión decreciente $(y_n)_{n \in \{0,1,\ldots\}}$ de números reales en $[a, b]$ tal que:

i) $y_0 = b$

ii) $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} y_n = w$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |g(y_{n-1}) - g(y_n)| = \infty$

b) Existe una sucesión creciente $(x_n)_{n \in \{0,1,\ldots\}}$ *de números reales en* $[a, b]$ *tal que:*

i) $x_0 = a$

ii) $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} x_n = w$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |g(x_n) - g(x_{n-1})| = \infty$

Lema 1. *Sea* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales no negativos tales que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. *Entonces existe una sucesión no creciente* $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de números reales positivos tales que* $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \infty$.

Teorema 6. *Sea* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada que no es de variación acotada en* $[a, b]$. *Entonces existe una función continua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *la cual no es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a* g.

Demostración

Sabemos que existe $w \in [a, b]$ para el cual se cumple alguna de las dos condiciones de la proposición anterior; supongamos que se cumple la segunda (así que $w \in (a, b]$) y consideremos una sucesión creciente $(x_n)_{n \in \{0,1,\ldots\}}$ de números reales en $[a, b]$ tal que $x_0 = a$, $\lim_{n \to \infty} x_n = w$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |g(x_n) - g(x_{n-1})| = \infty$.

Consideremos también una sucesión no creciente $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales positivos tales que $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} c_n = 0$ y:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n |g(x_n) - g(x_{n-1})| = \infty$$

Definamos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

Para $x \in \left[a, \frac{x_0 + x_1}{2}\right]$, $f(x) = a_0 x + b_0$, de tal manera que:

$f(a) = 0$

$$f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \begin{cases} c_1 & \text{si } g(x_1) - g(x_0) \geq 0 \\ -c_1 & \text{si } g(x_1) - g(x_0) < 0 \end{cases}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \left[\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right]$, $f(x) = a_k x + b_k$, de tal manera que:

$$f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) = \begin{cases} c_k & \text{si } g(x_k) - g(x_{k-1}) \geq 0 \\ -c_k & \text{si } g(x_k) - g(x_{k-1}) < 0 \end{cases}$$

$$f(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}) = \begin{cases} c_{k+1} & \text{si } g\left(x_{k+1}\right) - g\left(x_k\right) \geq 0 \\ -c_{k+1} & \text{si } g\left(x_{k+1}\right) - g\left(x_k\right) < 0 \end{cases}$$

Para $x \in [w, b]$, $f\left(x\right) = 0$.

Dada una partición $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$ de $[a, b]$ y $M > 0$, definamos:

$r = máx\left\{j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\} : v_j < w\right\}$

$s = mín\left\{j \in \{1, 2, \ldots\} : x_j > v_r\right\}$

$S = \sum_{j=1}^{r} f\left(v_{j-1}\right)\left[g\left(v_j\right) - g\left(v_{j-1}\right)\right] + f\left(v_r\right)\left[g\left(x_s\right) - g\left(v_r\right)\right]$

$k_M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=s+1}^{k_M} c_n \left|g\left(x_n\right) - g\left(x_{n-1}\right)\right| > M - S$

$P' = \{v_0, \ldots, v_r, x_s, \ldots, x_{k_M}, w, v_{r+1}, \ldots, v_N\}$

$S\left(P', f, g\right) = \sum_{j=1}^{r} f\left(v_{j-1}\right)\left[g\left(v_j\right) - g\left(v_{j-1}\right)\right] + f\left(v_r\right)\left[g\left(x_s\right) - g\left(v_r\right)\right]$

$+ \sum_{j=s+1}^{k_M} f(\tfrac{x_{j-1}+x_j}{2})\left[g\left(x_j\right) - g\left(x_{j-1}\right)\right] + f\left(w\right)\left[g\left(w\right) - g\left(x_{k_M}\right)\right]$

$+f\left(w\right)\left[g\left(v_{r+1}\right) - g\left(w\right)\right] + \sum_{j=r+1}^{N-1} f\left(v_j\right)\left[g\left(v_{j+1}\right) - g\left(v_j\right)\right]$

donde una sumatoria $\sum_{j=i_1}^{i_2}$ se toma igual a cero cuando $i_2 < i_1$.

Entonces:

a) P' es un refinamiento de P.

b) $S\left(P', f, g\right)$ es una suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g, correspondiente a la particion P'.

c) $S\left(P', f, g\right) = S + \sum_{j=s+1}^{k_M} c_j \left|g\left(x_j\right) - g\left(x_{j-1}\right)\right| > M$.

Por lo tanto, no existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una particion P del intervalo $[a, b]$ tal que $|S(P', f, g) - I| < \varepsilon$ para cualquier particion P' que sea un refinamiento de P y cualquier suma de Riemann-Stieltjes $S(P', f, g)$ de f con respecto a g, correspondiente a la particion P'. Así que f no es integrable con respecto a g.

∎

Corolario 1. *Si toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a la función acotada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces g es de variación acotada.*

Fórmula de integración por partes

La fórmula de integración por partes es importante no únicamente como fórmula técnica que permite expresar la integral de una función f con respecto a g en términos de la integral de g con respecto a f. Una parte muy importante del resultado es que si una función f es integrable con respecto a una función g, entonces g es integrable con respecto a f. Esto permite afirmar, por ejemplo, que toda función de variación acotada es integrable con respecto a cualquier función continua.

Teorema 7. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y supongamos que f es integrable con respecto a g, entonces g es integrable con respecto a f y, además, se tiene:*

$$\int_a^b gdf = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b fdg$$

Corolario 2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces toda función de variación acotada es integrable con respecto a f.*

El siguiente resultado es el equivalente al Teorema Fundamental del Cálculo que se demuestra para la integral de Riemann. Además, muestra que el espacio vectorial formado por las funciones de variación acotada en un intervalo cerrado y acotado es cerrado bajo la composición de cualquier elemento de ese espacio con una función de clase C^1. Con base en el siguiente teorema podemos afirmar que, si g es continua, hay muchas funciones de g que siguen siendo de variación acotada: la composición de cualquier función de clase C^1 con g.

Teorema 8. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua de variación acotada y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , entonces $F \circ g$ es de variación acotada y:*

$$F(g(t)) = F(g(a)) + \int_a^t F'(g(s))dg(s)$$

para cualquier $t \in [a,b]$.

Demostración

Se tiene:

$$\int_a^t g^0(s)\,dg(s) = g(t) - g(a)$$

Supongamos que:

$$\int_a^t g^k(s)\,dg(s) = \tfrac{1}{k+1} g^{k+1}(t) - \tfrac{1}{k+1} g^{k+1}(a)$$

para cualquier $t \in [a,b]$, donde $k \in \{0,1,2,\ldots\}$.

Entonces:

$$g^{k+1}\left(t\right)=g^{k+1}\left(a\right)+\left(k+1\right)\int_a^t g^k\left(s\right)dg\left(s\right)$$

para cualquier $t\in[a,b]$.

En particular, g^{k+1} es continua y de variación acotada. Así que, por la fórmula de integración por partes, se tiene, para cualquier $t\in[a,b]$:

$g^{k+2}\left(t\right)=g^{k+1}\left(t\right)g\left(t\right)=g^{k+1}\left(a\right)g\left(a\right)+\int_a^t g^{k+1}\left(s\right)dg\left(s\right)+\int_a^t g\left(s\right)dg^{k+1}\left(s\right)$

$=g^{k+2}\left(a\right)+\int_a^t g^{k+1}\left(s\right)dg\left(s\right)+\left(k+1\right)\int_a^t g\left(s\right)g^k\left(s\right)dg\left(s\right)$

$=g^{k+2}\left(a\right)+\left(k+2\right)\int_a^t g^{k+1}\left(s\right)dg\left(s\right)$

Así que, por el principio de inducción matemática:

$$\int_a^t g^n\left(s\right)dg\left(s\right)=\frac{1}{n+1}g^{n+1}\left(t\right)-\frac{1}{n+1}g^{n+1}\left(a\right)$$

para cualquier $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ y cualquier $t\in[a,b]$.

Por lo tanto:

$$g^n\left(t\right)=g^n\left(a\right)+n\int_0^t g^{n-1}\left(s\right)dg\left(s\right)$$

para cualquier $n\in\mathbb{N}$ y cualquier $t\in[a,b]$.

Sea $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un polinomio dado por $p\left(x\right)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$, donde $n\in\mathbb{N}$. Entonces, por la linealidad de la integral:

$p(g\left(t\right))=\sum_{k=0}^n a_kg^k\left(t\right)=a_0+\sum_{k=1}^n\left[a_kg^k\left(a\right)+k\int_0^t g^{k-1}\left(s\right)dg\left(s\right)\right]$

$=p(g\left(a\right))+\int_a^t p'(g\left(s\right))dg\left(s\right)$

Sea $M=\sup\{|g\left(x\right)|:x\in[a,b]\}$.

Tomemos dos números reales c y d de tal forma que $c<-M$ y $d>M$, y definamos las funciones $F_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$F_c(x)=\left[\frac{F(-M)}{(c+M)^2}+\frac{(c+M)F'(-M)+2F(-M)}{(c+M)^3}\left(x+M\right)\right]\left(x-c\right)^2$

$F_d(x)=\left[\frac{F(M)}{(d-M)^2}+\frac{(d-M)F'(M)+2F(M)}{(d-M)^3}\left(x-M\right)\right]\left(x-d\right)^2$

$$G(x)=\begin{cases}F_c(x) & \text{si } x\in[c,-M)\\ F(x) & \text{si } x\in[-M,M]\\ F_d(x) & \text{si } x\in(M,d]\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

G es de clase C^1 y nula fuera del intervalo (c,d), así que existe una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios $p_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen uniformente a G y G', respectivamente, en el intervalo (c,d).

Además, $G(x)=F(x)$ y $G'(x)=F'(x)$ para cualquier $x\in[-M,M]$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, se tiene:

$$p_n(g(t))=p_n(g(a))+\int_a^t p'_n(g(s))dg(s)$$

Así que, tomando límites cuando $n\rightsquigarrow\infty$, se obtiene:

$$F(g(t))=F(g(a))+\int_a^t F'(g(s))dg(s)$$

para cualquier $t\in[a,b]$.

■

La integral de Lebesgue-Stieltjes

La integral de Lebesgue-Stieltjes es la que se se obtiene al considerar la integral con respecto a una medida generada por una función no decreciente definida sobre los borelianos de $\mathbb{R}$; así que tiene las propiedades de la integral de Lebesgue expuestas anteriormente.

Si $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función no decreciente continua por la derecha, denotaremos por μ_F a la medida generada por F, la cual está definida sobre la $\sigma-$álgebra denerada por los borelianos de $\mathbb{R}$ y los conjuntos de medida exterior cero provenientes del teorema de extensión de Carathéodory. Denotaremos a esta $\sigma-$álgebra por $\mathfrak{B}_F(\mathbb{R})$.

DEFINICIONES

Definición 5. *Si $f:(\mathbb{R},\mathfrak{B}_F(\mathbb{R}),\mu_F)\to\mathbb{R}$ es una función medible e integrable, diremos que f es Lebesgue-Stieltjes integrable con respecto a F y a la integral $\int_{\mathbb{R}} fd\mu_F$ la llamaremos la integral de Lebesgue-Stieltjes de f con respecto a F. Si $B\in\mathfrak{B}_F(\mathbb{R})$, denotaremos por $\int_B fd\mu_F$ a la integral $\int_{\mathbb{R}} I_B fd\mu_F$.*

Definición 6. *Sea $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función acotada sobre los conjuntos acotados y $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ es un conjunto acotado, definimos la integral de f con respecto a g, sobre el conjunto B, de la siguiente manera:*

$$\int_B fdg=\int_B fd\mu_{F_1}-\int_B fd\mu_{F_2}$$

donde $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es cualquier par de funciones no decrecientes continuas por la derecha tales que $g = F_1 - F_2$.

Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, también denotaremos por $\int_a^b f dg$ a la integral $\int_{(a,b]} f dg$. De igual forma, si $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente continua por la derecha, también denotaremos por $\int_a^b f d\mu_F$, o por $\int_a^b f dF$, a la integral $\int_{(a,b]} f d\mu_F$ y por $\int_B f dF$ a la integral $\int_B f d\mu_F$.

RESULTADOS

1. Si F es no decreciente y f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en el intervalo $[a, b]$, entonces f es medible e integrable y:

$$\int_{[a,b]} f d\mu_F = (RS) \int_a^b f dF$$

2. Sea $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función no decreciente continua por la derecha y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable con respecto a μ_F sobre cualquier conjunto boreliano acotado, entonces la función $H : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$H(t) = \int_{[0,t]} f d\mu_F$$

es continua por la derecha.

Además, si F es continua, entonces H es continua.

3. Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas sobre los conjuntos acotados, $a, b \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ un conjunto acotado, entonces:

$$\int_B (af + bh) \, dg = a \int_B f dg + b \int_B h dg$$

4. Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq |h|$ y f es una función medible tal que $f = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} f_n$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces f y f_n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, son funciones acotadas sobre los conjuntos acotados, y se tiene:

$$\int_B f dg = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_B f_n dg$$

para cualquier conjunto acotado $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

5. Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada sobre los conjuntos acotados, entonces la función $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$G(t) = \int_{[0,t]} f dg$$

es continua por la derecha y de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto.

Además, si g es continua, entonces G es continua.

6. Sean $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, entonces:

$$F(t) G(t) = F(0) G(0) + \int_0^t F dG + \int_0^t G dF - \sum_{s \in [0,t]} [F(s) - F(s-)] [G(s) - G(s-)]$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

7. Sean $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces:

$$g(t) h(t) = g(0) h(0) + \int_0^t g dh + \int_0^t h dg - \sum_{s \in [0,t]} [g(s) - g(s-)] [h(s) - h(s-)]$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

8. Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , entonces $F \circ g$ es de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto y:

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s)) dg^c(s) + \sum_{s \in [0,t]} [F(g(s)) - F(g(s-))]$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

DEMOSTRACIONES

Obviamente, la integral de Lebesgue-Stieltjes tiene las propiedades de cualquier integral con respecto a una medida, las cuales fueron expuestas y demostradas con aterioridad.

Si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente, la vamos a considerar extendida a todo $\mathbb{R}$, definiendo $F(x) = F(a)$ para cualquier $x < a$ y $F(x) = F(b)$ para cualquier $x > b$.

Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente, la función f podría integrarse con respecto a F en dos sentidos. Por un lado, f podría ser integrable con respecto a F como integral de Riemann-Stieltjes. Por otro lado, f podría ser integrable con respecto a F como integral de Lebesgue, para lo cual bastaría que f fuera $\mathfrak{B}_F(\mathbb{R})$-medible ya que es acotada.

Para evitar cualquier confusión, en lo sucesivo, cuando nos refiramos a la integral de Riemann-Stieltjes de una función $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a una función $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, utilizaremos la notación $(RS)\int_a^b f dg$.

Vamos a mostrar que la integral de Lebesgue-Stieltjes es una extensión de la integral de Riemann-Stieltjes. Para ello, probaremos que si f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F, entonces también es Lebesgue-Stieltjes integrable con respecto a F y que se tiene la igualdad $\int_{[a,b]} f d\mu_F = (RS)\int_a^b f dF$. Además, mostraremos que la integral de Lebesgue-Stieltjes extiende la familia de funciones integrables, para lo cual daremos ejemplos de funciones que son Lebesgue-Stieltjes integrables pero no Riemann-Stieltjes integrables. Como caso particular, tomando $F(x) = x$ para cualquier $x \in [a,b]$, tendremos que la integral de Lebesgue es una extensión de la integral de Riemann.

Teorema 9. *Si F es no decreciente y continua y f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en el intervalo $[a,b]$, entonces f es medible e integrable y:*

$$\int_{[a,b]} f d\mu_F = (RS)\int_a^b f dF$$

Demostración

Como f y F no tienen discontinuidades en común, f es integrable con respecto a F.

Sea $P_1, P_2, \ldots$ una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} es un refinamiento de P_n y la norma de P_n tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Sea $P_n = \left\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)}\right\}$ y definamos:

$M_i^{(n)} = \sup\left\{f(x) : x \in \left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]\right\}$, para $i \in \{1, 2, \ldots, m_n\}$

$m_i^{(n)} = \text{ínf}\left\{f(x) : x \in \left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]\right\}$, para $i \in \{1, 2, \ldots, m_n\}$

$\alpha^{(n)} = f(a) I_{\{a\}} + \sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)} I_{\left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]}$

$\beta^{(n)} = f(a) I_{\{a\}} + \sum_{i=1}^{m_n} m_i^{(n)} I_{\left(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]}$

Como f es integrable con respecto a F, se tiene:

$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} m_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]$

$= (RS) \int_a^b f dF$

Obviamente, $\alpha^{(n)}$ y $\beta^{(n)}$ son funciones medibles para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y están acotadas por la misma constante ya que f es acotada. Además, la sucesión de funciones $\left(\alpha^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y la sucesión $\left(\beta^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente; así que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha^{(n)}$ y $\beta = \lim_{n\to\infty} \beta^{(n)}$ son también medibles y acotadas. Además:

$\int_{[a,b]} \alpha^{(n)} d\mu_F = f(a)\,\mu_F(\{a\}) + \sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]$

$= \sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]$

$\int_{[a,b]} \beta^{(n)} d\mu_F = f(a)\,\mu_F(\{a\}) + \sum_{i=1}^{m_n} m_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]$

$= \sum_{i=1}^{m_n} m_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]$

$\beta^{(n)} \leq f \leq \alpha^{(n)}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, de lo cual se sigue que $\beta \leq f \leq \alpha$.

Por el teorema de la convergencia dominada, se tiene:

$\int_{[a,b]} \alpha d\mu_F = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{[a,b]} \alpha^{(n)} d\mu_F$

$= \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] = (RS) \int_a^b f dF$

$\int_{[a,b]} \beta d\mu_F = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{[a,b]} \beta^{(n)} d\mu_F$

$= \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)} \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] = (RS) \int_a^b f dF$

Así que, $\int_{[a,b]} (\alpha - \beta)\, d\mu_F = 0$. Por lo tanto:

$$\mu_F \{x \in [a,b] : \alpha(x) - \beta(x) > 0\} = 0$$

Por lo tanto, $\beta = f = \alpha$ excepto a lo más en un los puntos de un conjunto de medida μ_F cero. Así que f es medible y, como está acotada y $\mu_F([a,b]) < \infty$, es integrable y se tiene:

$$\int_{[a,b]} \beta d\mu_F = \int_{[a,b]} f d\mu_F = \int_{[a,b]} \alpha d\mu_F$$

Se concluye entonces que:

$$\int_{[a,b]} f d\mu_F = (RS) \int_a^b f dF$$

■

Corolario 3. *Si F es no decreciente y f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en el intervalo $[a,b]$, entonces f es medible e integrable y:*

$$\int_{[a,b]} f d\mu_F = (RS) \int_a^b f dF$$

Demostración

Como f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F, no tienen discontinuidades en común del mismo lado.

Expresemos F como la suma $F^d + F^i + F^c$, donde F^d es una función no decreciente, continua por la derecha, que crece únicamente mediante saltos y tal que $F^d(x) - F^d(x-) = F(x) - F(x-)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, F^i es una función no decreciente, continua por la izquierda, que crece únicamente mediante saltos y tal que $F^i(x+) - F^i(x) = F(x+) - F(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, y F^c es una función no decreciente y continua.

Obsérvese que $\mu_F = \mu_{F^d} + \mu_{F^i} + \mu_{F^c}$ y que, si $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es el conjunto donde F es discontinua, entonces $\mu_F(A) > 0$ para cualquier subconjunto $A \subset D$ y $\mu_{F^d}(D^c) = \mu_{F^i}(D^c) = 0$, así que la familia de conjuntos $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tales que $B \subset D^c$ y $\mu_F(B) = 0$, coincide con la familia de conjuntos $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tales que $B \subset D^c$ y $\mu_{F^c}(B) = 0$. Por lo tanto, la σ-álgebra completada $\mathfrak{B}_F(\mathbb{R})$ coincide con la σ-álgebra completada $\mathfrak{B}_{F^c}(\mathbb{R})$.

Como F^d es una función no decreciente, continua por la derecha y crece únicamente mediante saltos y f es una función acotada y continua por la izquierda en los puntos donde F^d es discontinua, entonces f es integrable con respecto a F^d y se tiene:

$$(RS) \int_a^b f dF^d = \sum_{\{x \in D\}} f(x) \left[F^d(x) - F^d(x-)\right]$$

De la misma manera, como F^i es una función no decreciente, continua por la izquierda y crece únicamente mediante saltos y f es una función acotada y continua por la derecha en los puntos donde F^d es discontinua, entonces f es integrable con respecto a F^d y se tiene:

$$(RS) \int_a^b f dF^i = \sum_{\{x \in D\}} f(x) \left[F^i(x+) - F^i(x)\right]$$

Además, como f es integrable con respecto a F^d, con respecto a F^i y con respecto a F, también es integrable con respecto a F^c. Así que, por la proposición anterior, f es $\mathfrak{B}_F(\mathbb{R})$-medible y μ_{F^c}-integrable, y se tiene:

$$\int_{[a,b]} f d\mu_{F^c} = (RS) \int_a^b f dF^c$$

Además, como f está acotada, es μ_{F^d}-integrableμ_{F^i}-integrable y y se tiene:

$$\int_{[a,b]} f d\mu_{F^d} = \sum_{\{x \in D\}} f(x) \mu_{F^d}(\{x\}) = \sum_{\{x \in D\}} f(x) \left[F^d(x) - F^d(x-)\right]$$

$$\int_{[a,b]} f d\mu_{F^i} = \sum_{\{x \in D\}} f(x)\mu_{F^i}(\{x\}) = \sum_{\{x \in D\}} f(x) \left[F^i(x+) - F^i(x)\right]$$

Por lo tanto:

$\int_{[a,b]} f d\mu_F = \int_{[a,b]} f d\mu_{F^d} + \int_{[a,b]} f d\mu_{F^i} + \int_{[a,b]} f d\mu_{F^c}$

$= (RS) \int_a^b f dF^d + (RS) \int_a^b f dF^i + (RS) \int_a^b f dF^c = (RS) \int_a^b f dF$

$\blacksquare$

Propiedades de la integral de Lebesgue Stieltjes

Ejemplos de funciones Lebesgue-Stieltjes integrables que no son Riemann-Stieltjes integrables, con respecto a una función no decreciente, hay muchos. Por ejemplo, toda función de variación acotada $f : (\mathbb{R}, \mathfrak{B}([a,b])) \to \mathbb{R}$ es medible ya que se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes, así que, cualquiera que sea la función no decreciente F, f es Lebesgue-Stieltjes integrable con respecto a F. En cambio, para que f sea Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F se requiere que f y F no tengan discontinuidades en común del mismo lado. Otro ejemplo se obtiene si definimos $f = I_B$, donde $B \in \mathfrak{B}([a,b])$. Una función de este tipo es Lebesgue-Stieltjes integrable con respecto a cualquier función F no decreciente y su integral está dada por $\mu_F(B)$. Por otra parte, si B es el conjunto de números racionales en el intervalo $[a,b]$, entonces I_B no es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a cualquier función no constante F no decreciente y continua.

Por otra parte, si la función F no es de variación acotada, no genera una medida μ_F sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}([a,b]))$, así que la integral de Lebesgue-Stieltjes, con respecto a F, de cualquier función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no está definida, pero f podría ser Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F. Tal es el caso si F es una función continua que no es de variación acotada y f una función de variación acotada.

Restringiéndonos a funciones F que son de variación acotada, se tienen algunos resultados interesantes. Uno es una extensión de uno de los ejemplos anteriores: Toda función de variación acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-Stieltjes integrable con respecto a cualquier función de variación acotada $F : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Por otra parte, algunos de los resultados que obtuvimos para la integral de Riemann-Stieltjes podemos ahora formularlos de una manera más general.

Nos vamos a restringir a considerar la integral de Lebesgue-Stieltjes de una función f con respecto a una función no decreciente y continua por la derecha F definida sobre el intervalo $[0,\infty)$, el cual, como ya lo mencionamos con anterioridad, también lo denotamos por $\mathbb{R}^+$. Sin embargo, para evitar nuevos enunciados, si $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente, la vamos a considerar extendida a todo $\mathbb{R}$, definiendo $F(x) = F(0)$ para cualquier $x < 0$. Así que la medida μ_F generada por F la consideraremos definida sobre el espacio $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_F(\mathbb{R}))$ definido al inicio de la sección anterior.

Teorema 10. *Sea $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función no decreciente continua por la derecha y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable con respecto a μ_F sobre cualquier conjunto boreliano acotado, entonces la función $H : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$H(t) = \int_{[0,t]} f d\mu_F$$

es continua por la derecha.

Además, si F es continua, entonces H es continua.

Demostración

Primero observemos que, como $\mu_F(\{0\}) = 0$, se tiene:

$$\int_{[0,t]} f d\mu_F = \int_{(0,t]} f d\mu_F$$

Sea $u \in [0, \infty)$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números reales tal que $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} u_n = u$. Entonces:

$I_{(u,u_n]} |f| \leq |f|$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} I_{(u,u_n]} |f| = 0$. Así que, por el teorema de la convergencia dominada:

$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} |H(u_n) - H(u)| = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \left| \int_{(u,u_n]} f d\mu_F \right|$

$\leq \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{(u,u_n]} |f| \, d\mu_F = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} I_{(u,u_n]} |f| \, d\mu_F = 0$

Por lo tanto, H es continua por la derecha en u.

Si F es continua, sea $u \in (0, \infty)$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de números reales positivos tal que $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} u_n = u$. Entonces:

$I_{(u_n,u]} |f| \leq |f|$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} I_{(u_n,u]} |f| = I_{\{u\}} |f|$. Así que, por el teorema de la convergencia dominada:

$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} |H(u) - H(u_n)| = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \left| \int_{(u_n,u]} f d\mu_F \right|$

$\leq \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{(u_n,u]} |f| \, d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} I_{\{u\}} |f| \, d\mu_F = \mu_F(\{u\}) |f|(u) = 0$

Por lo tanto, H es continua por la izquierda en u.

■

Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados. Entonces, si $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F_1' : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2' : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ son funciones no decrecientes continuas por la derecha tales que $g = F_1 - F_2 = F_1' - F_2'$, definamos:

$G_1 = F_1 + F_2'$

$G_2 = F_1' + F_2$

Entonces, para cualquier intervalo $(a, b]$, se tiene:

$$\mu_{G_1}((a, b]) = \mu_{G_2}((a, b])$$

Así que, $\mu_{G_1}(B) = \mu_{G_2}(B)$ para cualquier conjunto acotado $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ y, entonces, $\int_B f d\mu_{G_1} = \int_B f d\mu_{G_2}$.

Por lo tanto:

$$\int_B f d\mu_{F_1} - \int_B f d\mu_{F_2} = \int_B f d\mu_{F_1'} - \int_B f d\mu_{F_2'}$$

Definición 7. *Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada sobre los conjuntos acotados y $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ es un conjunto acotado, definimos la integral de f con respecto a g, sobre el conjunto B, de la siguiente manera:*

$$\int_B f dg = \int_B f d\mu_{F_1} - \int_B f d\mu_{F_2}$$

donde $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es cualquier par de funciones no decrecientes continuas por la derecha tales que $g = F_1 - F_2$.

Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, también denotaremos por $\int_a^b f dg$ a la integral $\int_{(a,b]} f dg$. De igual forma, si $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente continua por la derecha, también denotaremos por $\int_a^b f d\mu_F$, o por $\int_a^b f dF$, a la integral $\int_{(a,b]} f d\mu_F$ y por $\int_B f dF$ a la integral $\int_B f d\mu_F$.

La integral $\int_B f dg$ está bien definida ya que, como lo mencionamos antes, si $F_1' : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2' : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es otro par de funciones no decrecientes continuas por la derecha tales que $g = F_1' - F_2'$ entonces:

$$\int_B f d\mu_{F_1} - \int_B f d\mu_{F_2} = \int_B f d\mu_{F_1'} - \int_B f d\mu_{F_2'}$$

Por otra parte, la notación $\int_B f dF$ para la integral $\int_B f d\mu_F$ es consistente con la definición anterior ya que si g es no decreciente, entonces, de acuerdo con la definición 7, se tiene:

$$\int_B f dg = \int_B f d\mu_g$$

El siguiente resultado es inmediato:

Proposición 2. *Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas sobre los conjuntos acotados, $a, b \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ un conjunto acotado, entonces:*

$$\int_B (af + bh) \, dg = a \int_B f dg + b \int_B h dg$$

Proposición 3. *Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq |h|$ y f es una función medible tal que $f = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} f_n$ excepto a lo más en un conjunto de medida* *cero, entonces f y f_n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, son funciones acotadas sobre los conjuntos acotados, y se tiene:*

$$\int_B f dg = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_B f_n dg$$

para cualquier conjunto acotado $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Demostración

Sean $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, tales que $g = F_1 - F_2$.

Se tiene $|f| \leq |h|$, así que, f y f_n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y cualquier conjunto acotado $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, se tiene:

Así que f y f_n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, son funciones acotadas sobre los conjuntos acotados.

Además, por el teorema de la convergencia dominada, se tiene:

$$\int_B f dg = \int_B f d\mu_{F_1} - \int_B f d\mu_{F_2} = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_B f_n d\mu_{F_1} - \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_B f_n d\mu_{F_2}$$

$$= \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \left(\int_B f_n d\mu_{F_1} - \int_B f_n d\mu_{F_2} \right) = \lim_{n \to \infty} \int_B f_n dg$$

∎

Teorema 11. *Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados, entonces la función $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$G(t) = \int_{[0,t]} f dg$$

es continua por la derecha y de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto.

Además, si g es continua, entonces G es continua.

Demostración

Sean $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, tales que $g = F_1 - F_2$.

Sea $t \in (0, \infty)$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[0, t]$. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} |G(x_k) - G(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{(x_{k-1}, x_k]} f d\mu_{F_1} - \int_{(x_{k-1}, x_k]} f d\mu_{F_2} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_{k-1}, x_k]} |f| \, d\mu_{F_1} + \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_{k-1}, x_k]} |f| \, d\mu_{F_2} = \int_{(0,t]} |f| \, d\mu_{F_1} + \int_{(0,t]} |f| \, d\mu_{F_2}$$

Así que:

$$V_G[a, b] = \sup \{V_G(P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} \leq \int_{(0,t]} |f| \, d\mu_{F_1} + \int_{(0,t]} |f| \, d\mu_{F_2} < \infty$$

Por lo tanto, G es de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto.

Por otra parte, se tiene:

$$\int_{[0,t]} f dg = \int_{[0,t]} f d\mu_{F_1} - \int_{[0,t]} f d\mu_{F_2}$$

Además, si g es continua, podemos tomar F_1 y F_2 continuas.

Así que, por el teorema 10, G es continua por la derecha y, si g es continua, G también lo es.

■

Si $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente continua por la derecha, la función $F^d : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F^d(t) = \sum_{s \in [0,t]} [F(s) - F(s-)]$$

es no decreciente y continua por la derecha.

Además, la función $F^c = F - F^d$ es no decreciente y continua.

Así que, si $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces la fiunción $g^d : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g^d(t) = \sum_{s \in [0,t]} [g(s) - g(s-)]$$

es continua por la derecha y de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto y la función $g^c = g - g^d$ es continua y de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto.

Además, si $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ son dos funciones no decrecientes continuas por la derecha tales que $g = F_1 - F_2$, entonces:

$$g^d = F_1^d - F_2^d$$

$$g^c = F_1^c - F_2^c$$

Definición 8. *Si $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua por la derecha, no decreciente o de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, las funciones h^d y h^c serán llamadas la parte discreta y la parte continua, respectivamente, de h.*

Proposición 4. *Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados, entonces la serie:*

$$\sum_{s \in [0,t]} f(s)\left[g(s) - g(s-)\right]$$

es absolutamente convergente para cualquier $t \in [0, \infty)$.

Demostración

Sean $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, tales que $g = F_1 - F_2$.

Como f es integrable con respecto a $\mu_{F_1^d}$ y con respecto a $\mu_{F_2^d}$ sobre los conjuntos borelianos acotados, las series:

$$\sum_{s \in [0,t]} |f(s)|\left[F_1(s) - F_1(s-)\right] = \int_0^t |f|\, d\mu_{F_1^d}$$

$$\sum_{s \in [0,t]} |f(s)|\left[F_2(s) - F_2(s-)\right] = \int_0^t |f|\, d\mu_{F_2^d}$$

son convergentes para cualquier $t \in [0, \infty)$.

Además:

$$\sum_{s \in [0,t]} |f(s)|\, |g(s) - g(s-)| = \sum_{s \in [0,t]} |f(s)|\, |F_1(s) - F_1(s-) - [F_2(s) - F_2(s-)]|$$

$$\leq \sum_{s \in [0,t]} |f(s)|\, |F_1(s) - F_1(s-)| + \sum_{s \in [0,t]} |f(s)|\, |F_2(s) - F_2(s-)| < \infty$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

■

Teorema 12. *Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados, entonces:*

$$\int_0^t f dg = \int_0^t f dg^c + \sum_{s \in [0,t]} f(s)\left[g(s) - g(s-)\right]$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

Demostración

Sean $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, tales que $g = F_1 - F_2$.

Entonces:

$$\int_0^t f dg = \int_0^t f dF_1 - \int_0^t f dF_2 = \int_0^t f dF_1^c + \int_0^t f dF_1^d - \left(\int_0^t f dF_2^c + \int_0^t f dF_2^d\right)$$

$= \int_0^t f dF_1^c - \int_0^t f dF_2^c + \int_0^t f dF_1^d - \int_0^t f dF_2^d$

$= \int_0^t f dg^c + \int_0^t f dF_1^d - \int_0^t f dF_2^d$

$= \int_0^t f dg^c + \sum_{s\in[0,t]} f(s)[F_1(s) - F_1(s-)] - \sum_{s\in[0,t]} f(s)[F_2(s) - F_2(s-)]$

$= \int_0^t f dg^c + \sum_{s\in[0,t]} f(s)\{F_1(s) - F_2(s) - [F_1(s-) - F_2(s-)]\}$

$= \int_0^t f dg^c + \sum_{s\in[0,t]} f(s)[g(s) - g(s-)]$

■

Sean $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, tales que $g = F_1 - F_2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados, y $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(t) = \int_0^t f dg$. Se tiene entonces:

$G(t) = \int_0^t f dg = \int_0^t f d\mu_{F_1} - \int_0^t f d\mu_{F_2} = \int_0^t f^+ d\mu_{F_1} - \int_0^t f^- d\mu_{F_1} - \left(\int_0^t f^+ d\mu_{F_2} - \int_0^t f^- d\mu_{F_2}\right)$

$= \int_0^t f^+ d\mu_{F_1} + \int_0^t f^- d\mu_{F_2} - \left(\int_0^t f^- d\mu_{F_1} + \int_0^t f^+ d\mu_{F_2}\right)$

Definamos $G_1 [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $G_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$G_1(t) = \int_0^t f^+ d\mu_{F_1} + \int_0^t f^- d\mu_{F_2}$$

$$G_2(t) = \int_0^t f^- d\mu_{F_1} + \int_0^t f^+ d\mu_{F_2}$$

Entonces G_1 y G_2 son funciones no decrecientes continuas por la derecha y $G = G_1 - G_2$.

Así que, si $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ es un conjunto acotado y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada sobre los conjuntos acotados, se tiene:

$$\int_B h dG = \int_B h d\mu_{G_1} - \int_B h d\mu_{G_2}$$

Teorema 13. *Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre los conjuntos acotados y $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(t) = \int_0^t f dg$. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada sobre los conjuntos acotados, entonces:*

$$\int_B h dG = \int_B h f dg$$

para cualquier conjunto acotado $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Demostración

Sean $F_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, tales que $g = F_1 - F_2$.

Definamos $G_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $G_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y las medidas ν_1^+, ν_2^+, ν_1^- y ν_2^-, sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, de la siguiente manera:

$G_1(t) = \int_0^t f^+ d\mu_{F_1} + \int_0^t f^- d\mu_{F_2}$

$G_2(t) = \int_0^t f^- d\mu_{F_1} + \int_0^t f^+ d\mu_{F_2}$

$\nu_1^+(B) = \int_B f^+ d\mu_{F_1}$

$\nu_2^+(B) = \int_B f^+ d\mu_{F_2}$

$\nu_1^-(B) = \int_B f^- d\mu_{F_1}$

$\nu_2^-(B) = \int_B f^- d\mu_{F_2}$

Entonces G_1 y G_2 son funciones no decrecientes continuas por la derecha y $G = G_1 - G_2$.

Además:

$\int_B h dG = \int_B h d\mu_{G_1} - \int_B h d\mu_{G_2} = \int_B h d\nu_1^+ + \int_B h d\nu_2^- - \int_B h d\nu_1^- - \int_B h d\nu_2^+$

$= \int_B h^+ d\nu_1^+ - \int_B h^- d\nu_1^+ + \int_B h^+ d\nu_2^- - \int_B h^- d\nu_2^- - \int_B h^+ d\nu_1^-$

$+ \int_B h^- d\nu_1^- - \int_B h^+ d\nu_2^+ + \int_B h^- d\nu_2^+$

$= \int_B h^+ f^+ d\mu_{F_1} - \int_B h^- f^+ d\mu_{F_1} + \int_B h^+ f^- d\mu_{F_2} - \int_B h^- f^- d\mu_{F_2} - \int_B h^+ f^- d\mu_{F_1}$

$+ \int_B h^- f^- d\mu_{F_1} - \int_B h^+ f^+ d\mu_{F_2} + \int_B h^- f^+ d\mu_{F_2}$

$= \int_B h^+ f^+ d\mu_{F_1} - \int_B h^+ f^- d\mu_{F_1} - \int_B h^- f^+ d\mu_{F_1} + \int_B h^- f^- d\mu_{F_1} - \int_B h^+ f^+ d\mu_{F_2}$

$+ \int_B h^+ f^- d\mu_{F_2} + \int_B h^- f^+ d\mu_{F_2} - \int_B h^- f^- d\mu_{F_2}$

$= \int_B h^+ f d\mu_{F_1} - \int_B h^- f d\mu_{F_1} - \int_B h^+ f d\mu_{F_2} + \int_B h^- f d\mu_{F_2}$

$= \int_B h f d\mu_{F_1} - \int_B h f d\mu_{F_2} = \int_B h f dg$

$\blacksquare$

Fórmula de integración por partes

Teorema 14. *Sean $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y $G : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha, entonces:*

$$F(t)\,G(t) = F(0)\,G(0) + \int_0^t F dG + \int_0^t G dF - \sum_{s\in[0,t]} [F(s) - F(s-)]\,[G(s) - G(s-)]$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

Demostración

Sea μ la medida producto $\mu_F \times \mu_G$, definida sobre $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$, $t \in (0, \infty)$ y $C_t = [0, t] \times [0, t]$. Entonces, aplicando el teorema de Fubini, se tiene:

$[F(t) - F(0)]\,[G(t) - G(0)] = \mu(C_t)$

$= \mu(\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u < v \leq t\}) + \mu(\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq u \leq t\})$

$= \int_{[0,t]} \left(\int_{[0,v)} dF(u)\right) dG(v) + \int_{[0,t]} \left(\int_{[0,u]} dG(v)\right) dF(u)$

$= \int_{[0,t]} [F(v-) - F(0)]\, dG(v) + \int_{[0,t]} [G(u) - G(0)]\, dF(u)$

$= \int_{[0,t]} F(v-)\, dG(v) - F(0)\,[G(t) - G(0)] + \int_{[0,t]} G(u)\, dF(u) - G(0)\,[F(t) - F(0)]$

Así que:

$F(t)\,G(t) = F(0)\,G(0) + \int_0^t F(v-)\, dG(v) + \int_0^t G(u)\, dF(u)$

$= F(0)\,G(0) + \int_0^t F(v)\, dG(v) + \int_0^t G(u)\, dF(u) - \int_0^t [F(v) - F(v-)]\, dG(v)$

$= F(0)\,G(0) + \int_0^t F dG + \int_0^t G dF - \sum_{v\in[0,t]} [F(v) - F(v-)]\,[G(v) - G(v-)]$

$\blacksquare$

Teorema 15. *Sean $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, entonces:*

$$g(t)\,h(t) = g(0)\,h(0) + \int_0^t g dh + \int_0^t h dg - \sum_{s\in[0,t]} [g(s) - g(s-)]\,[h(s) - h(s-)]$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

Demostración

Sean $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $G_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $G_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones no decrecientes continuas por la derecha, tales que $g = F_1 - F_2$ y $h = G_1 - G_2$. Entonces, para cualesquiera $s, t \in [0, \infty)$, se tiene:

$\int_0^t g dh = \int_0^t g dG_1 - \int_0^t g dG_2 = \int_0^t F_1 dG_1 - \int_0^t F_2 dG_1 - \int_0^t F_1 dG_2 + \int_0^t F_2 dG_2$

$\int_0^t h dg = \int_0^t h dF_1 - \int_0^t h dF_2 = \int_0^t G_1 dF_1 - \int_0^t G_2 dF_1 - \int_0^t G_1 dF_2 + \int_0^t G_2 dF_2$

$[g(s) - g(s-)]\,[h(s) - h(s-)]$

$= [F_1(s) - F_2(s) - F_1(s-) + F_2(s-)]\,[G_1(s) - G_2(s) - G_1(s-) + G_2(s-)]$

$= [F_1(s) - F_1(s-)]\,[G_1(s) - G_1(s-)] + [F_2(s) - F_2(s-)]\,[G_2(s) - G_2(s-)]$

$- [F_1(s) - F_1(s-)]\,[G_2(s) - G_2(s-)] - [F_2(s) - F_2(s-)]\,[G_1(s) - G_1(s-)]$

Así que:

$g(t)\,h(t) = [F_1(t) - F_2(t)]\,[G_1(t) - G_2(t)]$

$= F_1(t)\,G_1(t) + F_2(t)\,G_2(t) - F_1(t)\,G_2(t) - F_2(t)\,G_1(t)$

$= F_1(0)\,G_1(0) + \int_0^t F_1 dG_1 + \int_0^t G_1 dF_1 - \sum_{s\in[0,t]} [F_1(s) - F_1(s-)]\,[G_1(s) - G_1(s-)]$

$+F_2(0)\,G_1(0) + \int_0^t F_2 dG_2 + \int_0^t G_2 dF_2 - \sum_{s\in[0,t]} [F_2(s) - F_2(s-)]\,[G_2(s) - G_2(s-)]$

$-F_1(0)\,G_2(0) - \int_0^t F_1 dG_2 - \int_0^t G_2 dF_1 + \sum_{s\in[0,t]} [F_1(s) - F_1(s-)]\,[G_2(s) - G_2(s-)]$

$-F_2(0)\,G_1(0) - \int_0^t F_2 dG_1 - \int_0^t G_1 dF_2 + \sum_{s\in[0,t]} [F_2(s) - F_2(s-)]\,[G_1(s) - G_1(s-)]$

$= g(0)\,h(0) + \int_0^t g dh + \int_0^t h dg - \sum_{s\in[0,t]} [g(s) - g(s-)]\,[h(s) - h(s-)]$

■

Fórmula de cambio de variable

Teorema 16. *Sea $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la derecha, de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto, y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , entonces $F \circ g$ es de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto y:*

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} [F(g(s)) - F(g(s-))]$$

para cualquier $t \in [0,\infty)$.

Demostración

Para cualquier $t \in [0,\infty)$,se tiene:

$$g(t) = g(0) + \int_0^t dg(s) = g(0) + \int_0^t dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} [g(s) - g(s-)]$$

Supongamos que:

$$g^k(t) = g^k(0) + k\int_0^t g^{k-1}(s)\,dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} \left[g^k(s) - g^k(s-)\right]$$

para cualquier $t \in [0,\infty)$, donde $k \in \mathbb{N}$.

Entonces, utilizando la fórmula de integración por partes:

$g^{k+1}(t) = g^{k+1}(0) + \int_0^t g^k dg + \int_0^t g dg^k - \sum_{s\in[0,t]} \left[g^k(s) - g^k(s-)\right][g(s) - g(s-)]$

$= g^{k+1}(0) + \int_0^t g^k dg^c + \sum_{s\in[0,t]} g^k(s)[g(s) - g(s-)]$

$+k\int_0^t g^k dg^c + \sum_{s\in[0,t]} g(s)\left[g^k(s) - g^k(s-)\right] - \sum_{s\in[0,t]} \left[g^k(s) - g^k(s-)\right][g(s) - g(s-)]$

$= g^{k+1}(0) + \int_0^t g^k dg^c + k\int_0^t g^k dg^c + \sum_{s\in[0,t]} g^k(s)[g(s) - g(s-)]$

$+\sum_{s\in[0,t]} \left[g^k(s) - g^k(s-)\right] g(s-)$

$= g^{k+1}(0) + (k+1)\int_0^t g^k dg^c + \sum_{s\in[0,t]} g^k(s)[g(s) - g(s-)]$

$+\sum_{s\in[0,t]} [g(s) - g(s-)] \left[\sum_{j=0}^{k-1} g^j(s) g^{k-1-j}(s-)\right] g(s-)$

$= g^{k+1}(0) + (k+1)\int_0^t g^k dg^c$

$+\sum_{s\in[0,t]} [g(s) - g(s-)] \left\{g^k(s) + \left[\sum_{j=0}^{k-1} g^j(s) g^{k-1-j}(s-)\right] g(s-)\right\}$

$= g^{k+1}(0) + (k+1)\int_0^t g^k dg^c$

$+\sum_{s\in[0,t]} [g(s) - g(s-)] \left[g^k(s) + \sum_{j=0}^{k-1} g^j(s) g^{k-j}(s-)\right]$

$= g^{k+1}(0) + (k+1)\int_0^t g^k dg^c$

$+\sum_{s\in[0,t]} [g(s) - g(s-)] \sum_{j=0}^{k} g^j(s) g^{k-j}(s-)$

$= g^{k+1}(0) + (k+1)\int_0^t g^k dg^c + \sum_{s\in[0,t]} \left[g^{k+1}(s) - g^{k+1}(s-)\right]$

para cualquier $t \in [0,\infty)$.

Así que, por el principio de inducción matemática:

$$g^n(t) = g^n(0) + n\int_0^t g^{n-1}(s)\, dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} [g^n(s) - g^n(s-)]$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $t \in [0,\infty)$.

Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio dado por $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, donde $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la linealidad de la integral:

$p(g(t)) = \sum_{k=0}^n a_k g^k(t)$

$= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \left\{g^k(0) + k\int_0^t g^{k-1}(s)\, dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} \left[g^k(s) - g^k(s-)\right]\right\}$

$= \sum_{k=0}^n a_k g^k(t)$

$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k g^k(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t k a_k g^{k-1}(s)\, dg^c(s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s\in[0,t]} \left[a_k g^k(s) - a_k g^k(s-)\right]$

$= p(g(0)) + \int_0^t p'(g(s)) dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} [p(g(s)) - p(g(s-))]$

Sea $M = \sup\{\text{máx}(|g(s)|, |g(s-)|) : s \in [0,t]\}$, tomemos $c > M$ y definamos las funciones $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$G_1(s) = \left[\frac{F(-M)}{(M-c)^2} + \frac{(M-c)F'(-M)+2F(-M)}{(M-c)^3}(s+M)\right](s+c)^2$

$G_2(s) = \left[\frac{F(M)}{(c-M)^2} + \frac{(c-M)F'(M)+2F(M)}{(c-M)^3}(s-M)\right](s-c)^2$

$G(x) = \begin{cases} G_1(x) & \text{si } x \in [-c, -M) \\ F(x) & \text{si } x \in [-M, M] \\ G_2(x) & \text{si } x \in (M, c] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Entonces:

$G_1(-c) = 0$, $G_1(-M) = F(-M)$, $G_1'(-c) = 0$, $G_1'(-M) = F'(-M)$

$G_2(c) = 0$, $G_2(M) = F(M)$, $G_2'(c) = 0$, $G_2'(M) = F'(M)$

$G(x) = F(x)$ y $G'(x) = F'(x)$ para cualquier $x \in [-M, M]$

Además, G es de clase C^1 y nula fuera del intervalo $(-c, c)$, así que existe una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(p_n')_{n\in\mathbb{N}}$ convergen uniformente a G y G', respectivamente, en el intervalo $(-c, c)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$p_n(g(t)) = p_n(g(0)) + \int_0^t p_n'(g(s)) dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} [p_n(g(s)) - p_n(g(s-))]$$

En particular, $p_n \circ g$ es de variación acotada sobre cualquier intervalo compacto.

Restringidas al intervalo $[-M, M]$, $p_n' \circ g$ está acotada para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Sea entonces $C \in \mathbb{R}$ tal que $|p_n' \circ g| \leq C$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Si $F_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ son dos funciones no decrecientes continuas tales que $g^c = F_1 - F_2$, entonces μ_{F_1} y μ_{F_2} restringidas al intervalo $[0, t]$ son medidas finitas, así que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $p_n' \circ g$ es integrable con respecto a μ_{F_1} y μ_{F_2}. Por lo tanto, aplicando el teorema de la convergencia dominada:

$$\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_0^t p_n'(g(s)) dg^c(s) = \int_0^t F'(g(s)) dg^c(s)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $F_1^{(n)} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $F_2^{(n)} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones no decrecientes continuas por la derecha tales que $p_n \circ g = F_1^{(n)} - F_2^{(n)}$.

Las series $\sum_{s\in[0,t]}\left[F_1^{(n)}(s)-F_1^{(n)}(s-)\right]$ y $\sum_{s\in[0,t]}\left[F_2^{(n)}(s)-F_2^{(n)}(s-)\right]$ son absolutamente convergentes ya que sus términos son no negativos y:

$\sum_{s\in[0,t]}\left[F_1^{(n)}(s)-F_1^{(n)}(s-)\right]\leq F_1^{(n)}(t)-F_1^{(n)}(0)$

$\sum_{s\in[0,t]}\left[F_2^{(n)}(s)-F_2^{(n)}(s-)\right]\leq F_2^{(n)}(t)-F_2^{(n)}(0)$

Así que la serie:

$\sum_{s\in[0,t]}[p_n(g(s)-p_n(g(s-)]=\sum_{s\in[0,t]}\left\{\left[F_1^{(n)}(s)-F_1^{(n)}(s-)\right]-\left[F_2^{(n)}(s)-F_2^{(n)}(s-)\right]\right\}$ es absolutamente convergente ya que:

$\left|\left[F_1^{(n)}(s)-F_1^{(n)}(s-)\right]-\left[F_2^{(n)}(s)-F_2^{(n)}(s-)\right]\right|$

$\leq\left[F_1^{(n)}(s)-F_1^{(n)}(s-)\right]+\left[F_2^{(n)}(s)-F_2^{(n)}(s-)\right]$

También la serie $\sum_{s\in[0,t]}|g(s)-g(s-)|$ es convergente ya que si $F_1^{(0)}:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ y $F_2^{(0)}:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ son dos funciones no decrecientes continuas por la derecha tales que $g=F_1-F_2$, entonces:

$\sum_{s\in[0,t]}|g(s)-g(s-)|=\sum_{s\in[0,t]}|F_1(s)-F_1(s-)-[F_2(s)-F_2(s-)]|$

$\leq\sum_{s\in[0,t]}|F_1(s)-F_1(s-)|+\sum_{s\in[0,t]}|F_2(s)-F_2(s-)|\leq F_1(t)-F_1(0)+F_2(t)-F_2(0)<\infty$

Además, como, para cualquier $n\in\mathbb{N}$, p_n y F son funciones continuas en el intervalo $[-c,c]$ y derivables con derivada continua en el intervalo $(-c,c)$, para cualquier $s\in[0,t]$ tal que $g(s-)\neq g(s)$, se tiene:

$$(p_n-F)(g(s))-(p_n-F)(g(s-))=(p_n'-F')\left(\xi_s^{(n)}\right)[g(s))-g(s-)]$$

donde $\xi_s^{(n)}\in(\mathrm{mín}(g(s),g(s-)),\mathrm{máx}(g(s),g(s-)))$.

Por lo tanto:

$\left|\sum_{s\in[0,t]}[(p_n-F)(g(s))-(p_n-F)(g(s-))]\right|=\left|\sum_{s\in[0,t]}(p_n'-F')\left(\xi_s^{(n)}\right)[g(s)-g(s-)]\right|$

$\leq\sum_{s\in[0,t]}\left|(p_n'-F')\left(\xi_s^{(n)}\right)\right||g(s)-g(s-)|$

Como la sucesión $(p_n'-F')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero, dada $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que:

$$|(p_n'-F')(x)|<\frac{1}{\sum_{s\in[0,t]}|g(s)-g(s-)|}\varepsilon$$

para cualquier $x \in (-c, c)$ y $n \geq N$, así que:

$$\sum_{s\in[0,t]} \left|(p_n' - F')\left(\xi_s^{(n)}\right)\right| |g(s)) - g(s-)| < \varepsilon$$

para cualquier $n \geq N$.

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{s\in[0,t]} [(p_n - F)(g(s)) - (p_n - F)(g(s-))] = 0$$

Así que, tomando límites cuando $n \rightsquigarrow \infty$ en la expresión:

$$p_n(g(t)) = p_n(g(0)) + \int_0^t p_n'(g(s))dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} [p_n(g(s)) - p_n(g(s-))]$$

se obtiene:

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))dg^c(s) + \sum_{s\in[0,t]} [F(g(s)) - F(g(s-))]$$

para cualquier $t \in [0, \infty)$.

$\blacksquare$